

**Compito 1**

---

1) Sono dati due vettori uguali in modulo  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , formanti un angolo  $\theta_{ab}$ . Calcolare  $m = \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$  sapendo che il modulo della loro somma vale 24 ed il modulo della loro differenza vale 10.

**Soluzione**

$$\begin{cases} \|\vec{a} + \vec{b}\| = s \\ \|\vec{a} - \vec{b}\| = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 2m^2 (1 + \cos \theta_{ab}) \\ (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2m^2 (1 - \cos \theta_{ab}) \end{cases}$$

quindi sottraendo membro a membro si ottiene:

$$s^2 + d^2 = 4m^2 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{s^2 + d^2}}{2}.$$

2) Un'auto parte da ferma ed accelera per  $\Delta t_1 = 10 \text{ s}$  con un'accelerazione pari a  $a_0 = 2 \text{ m/s}^2$ . Successivamente viaggia con velocità costante  $v_0$  per  $\Delta t_2 = 20 \text{ s}$ . Determinare  $v_0$ , in  $\text{Km/h}$ , e lo spazio  $\Delta s$  complessivamente percorso dall'auto nell'intervallo  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ , in  $\text{Km}$ .

---

### Soluzione

Lo spazio percorso nel primo intervallo di tempo è

$$\Delta s_I = \frac{1}{2} a_0 \Delta t_1^2$$

e la velocità al termine di tale intervallo è

$$\Delta v_I = a_0 \Delta t_1 \equiv v_0 = 20 \text{ m/s} = 72 \text{ Km/h} .$$

Lo spazio percorso durante il secondo intervallo di tempo è

$$\Delta s_{II} = v_0 \Delta t_2 = a_0 \Delta t_1 \Delta t_2$$

quindi lo spazio totale sarà

$$\Delta s = \frac{1}{2} a_0 \Delta t_1^2 + a_0 \Delta t_1 \Delta t_2 = 500 \text{ m} = 0.5 \text{ Km} .$$

3) La legge oraria di un punto materiale è data da

$s(t) = 8at^2 + 2bt + c$ . Si determinino  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sapendo che

$s(0 \text{ s}) = 1 \text{ m}$ ,  $v(0 \text{ s}) = 2 \text{ m/s}$ ,  $s(10 \text{ s}) = 31 \text{ m}$ .

### Soluzione

Derivando lo spostamento si ottiene la velocità in funzione del tempo:

$$v(t) = 16at + 2b ;$$

infine per ipotesi deve essere:

$$\left\{ \begin{array}{l} s(0 \text{ s}) = 1 \text{ m} = c \\ v(0 \text{ s}) = 2 \text{ m/s} = 2b \Rightarrow b = 1 \text{ m/s} \\ s(10 \text{ s}) = 31 \text{ m} = 8a(10 \text{ s})^2 + 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} 10 \text{ s} + 1 \text{ m} \Rightarrow a = \frac{1}{80} \text{ m/s}^2 \end{array} \right. .$$

4) Un punto materiale si trova fermo su un piano inclinato rispetto al suolo di un angolo  $\alpha = 30^\circ$  ed ad una quota  $h = 2 \text{ m}$  da terra.

Determinare il tempo  $\Delta t$  necessario affinché il corpo arrivi a terra ( $h = 0 \text{ m}$ ) ipotizzando che tutti gli attriti siano trascurabili.

Esprimere il risultato in secondi ( $s$ ).

### Soluzione

La risultante delle forze agenti sul punto è

$$\vec{R} = \vec{R} + \vec{P} = R \hat{n} + mg \sin \alpha \hat{t} - mg \cos \alpha \hat{n}$$

e l'accelerazione è tangenziale al piano e si può scrivere come

$$\vec{a} = \ddot{s} \hat{t} .$$

Quindi la seconda legge della dinamica sarà:

$$R \hat{n} + mg \sin \alpha \hat{t} - mg \cos \alpha \hat{n} = m \ddot{s} \hat{t}$$

che, proiettata nella direzione del moto  $\hat{t}$  dà:

$$m \ddot{s} = mg \sin \alpha = \frac{mg}{2} \Rightarrow \ddot{s} = \frac{g}{2} \Rightarrow s(t) = \frac{g}{4} t^2 .$$

Il corpo arriva a terra quando ha percorso un tratto pari a

$$\Delta s = \frac{h}{\sin \alpha} = 2h \Rightarrow 2h = \frac{1}{4} g \Delta t^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{8h}{g}} = 1.28 \text{ s} .$$

5) Un satellite ruota su un'orbita circolare intorno alla terra con una velocità in modulo pari a  $\|\vec{v}_0\| = 1000 \text{ Km/h}$  . Determinare quanto dista l'orbita dal centro della terra. (esprimere il risultato in  $\text{Km}$  )

### Soluzione

La seconda legge della dinamica nella direzione radiale è

$$\gamma \frac{m_s M_T}{R^2} = m_s \frac{\|\vec{v}_0\|^2}{R} \Rightarrow R = \frac{\gamma M_T}{\|\vec{v}_0\|^2} = 5.16 \cdot 10^6 \text{ Km} .$$

---

***Costanti:***  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$  ,  $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ Kg}^{-2}$  ,  $M_T = 5.971 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$  ,  
 $R_T = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$  ,  $M_L = 7.35 \cdot 10^{22} \text{ Kg}$  ,  $R_L = 1738 \text{ Km}$  .

---

**Compito 2**

1) Sono dati due vettori uguali in modulo  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , formanti un angolo  $\theta_{ab}$ . Calcolare  $m = \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$  sapendo che il modulo della loro somma vale 8 ed il modulo della loro differenza vale 6.

**Soluzione**

Vedere la soluzione del compito 1.

2) Un'auto viaggia a velocità costante  $v_0$  per  $\Delta t_1 = 20 s$  e successivamente inizia a rallentare con decelerazione costante pari ad  $a_0 = -1 m/s^2$  fermandosi dopo  $\Delta t_2 = 5 s$ . Determinare  $v_0$ , in  $Km/h$ , e lo spazio  $\Delta s$  complessivamente percorso dall'auto nell'intervallo  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ , in  $Km$ .

**Soluzione**

Lo spazio percorso dopo il primo intervallo di tempo è:

$$\Delta s_I = v_0 \Delta t_1;$$

la variazione di velocità dopo il secondo intervallo di tempo è

$$\Delta v_{II} = a_0 \Delta t_2 = -v_0 \Rightarrow v_0 = 5 m/s = 18 Km/h.$$

È ora possibile determinare lo spazio percorso dopo il secondo intervallo:

$$\Delta s_{II} = \frac{1}{2} a_0 \Delta t_2^2 + v_0 \Delta t_2$$

e quindi lo spazio totale

$$\Delta s = \Delta s_I + \Delta s_{II} = 112.5 m = 0.1125 Km.$$

---

3) La legge oraria di un punto materiale è data da  $s(t) = 5at^2 + 2bt + 2c$ . Si determinino  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sapendo che  $s(0\text{ s}) = 2\text{ m}$ ,  $v(0\text{ s}) = 4\text{ m/s}$ ,  $v(10\text{ s}) = 5\text{ m/s}$ .

### Soluzione

Derivando lo spostamento si ottiene la velocità in funzione del tempo:

$$v(t) = 10at + 2b;$$

infine per ipotesi deve essere:

$$\begin{cases} s(0\text{ s}) = 2\text{ m} = 2c \Rightarrow c = 1\text{ m} \\ v(0\text{ s}) = 4\text{ m/s} = 2b \Rightarrow b = 2\text{ m/s} \\ v(10\text{ s}) = 5\text{ m/s} = 100\text{ s}a + 4\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow a = \frac{1}{100}\text{ m/s}^2 \end{cases} .$$

4) Un punto materiale, ad un certo istante, si trova fermo su un piano inclinato rispetto al suolo di un angolo  $\alpha = 60^\circ$ , ad una quota  $h = 10\text{ m}$  da terra. Determinare il modulo della velocità  $v$ , in  $\text{m/s}$ , quando il corpo arriva a terra ( $h = 0\text{ m}$ ) ipotizzando che tutti gli attriti siano trascurabili.

### Soluzione

Per la conservazione dell'energia meccanica del punto materiale

$$mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh_i} .$$

---

5) Un satellite ruota su un'orbita circolare intorno alla luna con una velocità angolare in modulo pari a  $\|\vec{\omega}_0\| = 10^{-1} s^{-1}$ . Determinare quanto dista, in  $Km$ , l'orbita dal centro della luna.

### Soluzione

La seconda legge della dinamica nella direzione radiale è

$$\gamma \frac{m_s M_L}{R^2} = m_s |\omega_0|^2 R \Rightarrow R^3 = \frac{\gamma M_L}{|\omega_0|^2} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{\gamma M_L}{|\omega_0|^2}} \Rightarrow R = 5.16 \cdot 10^6 \text{ Km} .$$

Costanti:  $g = 9.81 m / s^2$  ,  $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} N m^2 Kg^{-2}$  ,  $M_T = 5.971 \cdot 10^{24} Kg$  ,  
 $R_T = 6.37 \cdot 10^6 m$  ,  $M_L = 7.35 \cdot 10^{22} Kg$  ,  $R_L = 1738 Km$  .

---